JARRAITASUNA ETA DERIBAGARRITASUNA PUNTU BATEAN

E

Funtzio hau emanik,

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{baldin } 0 \le x < 2 \\ 2x + a & \text{baldin } 2 \le x \le 4 \\ -x^2 + 10x + b & \text{baldin } x > 4 \end{cases}$$

a) *Determinatu* a*-ren eta* b*-ren balioak, funtzioa jarraitua izan dadin* $x = 2$ *eta* $x = 4$ *puntuetan.*

b) *Aztertu deribagarritasuna* $x = 2$ *eta* $x = 4$ *puntuetan.*

c) *Egiaztatu emaitza grafikoki.*

a) $x = 2$ eta $x = 4$ puntuetan jarraitutasunaren hiru baldintzak betetzen direnetz determinatu behar dugu.

- $x = 2$ baliorako:

— $f(2) = 2 \cdot 2 + a = 4 + a \Rightarrow$ existitzen da $f(2)$, $\forall a \in \mathbb{R}$

— $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2x^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x + a) = 4 + a$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existi dadin, bi albo-limiteek berdinak izan behar dute. Alegia:

$$8 = 4 + a \Rightarrow a = 4$$

— $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ beteko da baldin $a = 4$ bada.

- $x = 4$ baliorako modu berean eginez, $b = -12$ lortuko dugu.

b) Puntu bakoitzeko deribagarritasuna egiaztatzeko, bi albo-deribatuak berdinak direnetz ikus behar dugu.

- $x = 2$ baliorako:

$f(2) = 8$. Beraz:

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2(2+h)^2 - 8}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2h^2 + 8h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (2h + 8) = 8$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{2(2+h) + 4 - 8}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}} = 2$$

$f'(2^-) \ne f'(2^+)$denez, $f(x)$ ez da deribagarria $x = 2$ puntuan.

- $x = 4$ baliorako:

$f(4) = 12$. Beraz:

$$f'(4^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2(4+h) + 4 - 12}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2h}{h} = 2$$

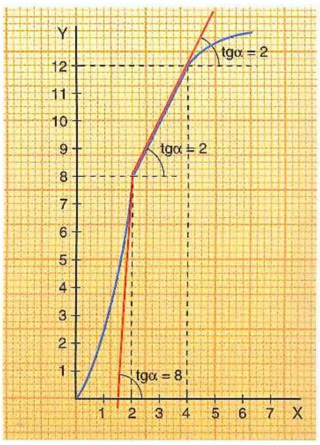
$$f'(4^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-(4+h)^2 + 10 \cdot (4+h) - 12 - 12}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0^+} (-h + 2) = 2$$

Hain zuzen $f'(4^-) = f'(4^+)$ denez, $f(x)$ deribagarria da $x = 4$ puntuan.

c) Irudian ikus dezakegunez, $x = 2$ puntuan funtzioaren grafikoak puntu angeluduna du; ordea, $x = 4$ puntuan maldaren aldaketa leuna du.



27. Funtzio hau emanik:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + 5 & \text{baldin } x < 4 \\ 6x + b & \text{baldin } 4 \le x \le 6 \\ -x^2 + 45 & \text{baldin } x > 6 \end{cases}$$

Determinatu a-ren eta b-ren balioak f funtzioa jarraitua izan dadin $x = 4$ eta $x = 6$ puntuetan, eta aztertu $x = 4$ eta $x = 6$ puntuetako deribagarritasuna.

Em.: $a = -10$, $b = -27$; deribagarria da $x = 4$ puntuan eta ez da deribagarria $x = 6$ puntuan

ARIKETA

E Problema. Izan bedi f honela definitutako funtzioa:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x<-1 \text{ bada,} \\ x^2+3 & x\geq -1 \text{ bada.}\end{cases}$$

Aurreko funtzioa deribagarria da $x=-1$ puntuan. Kalkulatu a eta b parametroen balioa, eta arrazoitu.

A)Funtzioa deribagarria bada x = -1 puntuan jarraia da puntu horretan. Beraz

1) $f(-1)=(-1)^2+3=4$

2) $$\lim_{x\to -1} f(x)= \begin{cases} \lim_{x\to -1^-}(ax+b)=-a+b \\ \lim_{x\to -1^+}\left(x^2+3\right)=4 \end{cases}$$

3) Funtzioa jarraia izan daiten x =-1 puntuan $f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)$; hau da $4=-a+b$ bete beharko dau

B) Funtzioa deribagarria izan daiten x = -1 puntuan albo deribadak puntu horretan bat etorri behar dira; hau da $f'(-1^-)=f'(-1^+)$

$f'(x)=\begin{cases} a & x<-1 \\ 2x & x>-1 \end{cases}$ izango da x =-1 puntuan izan ezik eta x = -1 ean

$f'(-1^-)=a$ eta $f'(-1^+)=2(-1)=-2$ izango dira. Puntu horretan funtzioa deribagarria izan daiten $f'(-1^-)=f'(-1^+)\ \Rightarrow\ a=-2$ izan behar da.

Orduan $\begin{cases} a=-2 \\ 4=-a+b \end{cases} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\ a=-2$ eta $b=2$ diranean funtzioa deribagarria izango

x =-1 puntuan eta bere deribada honako hau izango da : $f'(x)=\begin{cases} -2 & x<-1 \\ 2x & x\geq -1 \end{cases}$

ARIKETA

Izan bedi honela definitutako funtzioa: $f(x)=\begin{cases} ax+b & x<-1 \quad bada \\ x^2+3 & x\geq -1 \quad bada \end{cases}$ Kalkulatu a eta b parametroen balioak funtzioa deribagarria izan daiten .

LEHENENGO X= -1 PUNTUA AZTERTUKO DOGU

A)Funtzioa deribagarria **<u>izateko</u>** x = -1 puntuan lehenik jarraia **<u>izango da</u>** puntu horretan. Beraz

1) $f(-1)=(-1)^2+3=4$

2) $$\lim_{x\to -1} f(x)= \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-}(ax+b)=-a+b \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2+3\right)=4 \end{cases}$$

3) Funtzioa jarraia izango da x =-1 puntuan $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; hau da $4=-a+b$ betetzen danean

B) Funtzioa deribagarria izan daiten x = -1 puntuan albo deribadak puntu horretan bat etorri behar dira; hau da $f'(-1^-)=f'(-1^+)$

$f'(x)=\begin{cases} a & x<-1 \\ 2x & x>-1 \end{cases}$ izango da x =-1 puntuan izan ezik ; eta x=-1ean

$f'(-1^-)=a$ eta $f'(-1^+)=2(-1)=-2$ izango dira. Puntu horretan funtzioa deribagarria izan daiten $f'(-1^-)=f'(-1^+) \quad \Rightarrow \quad a=-2$ izan behar da.

$\begin{cases} a=-2 \\ 4=-a+b \end{cases} \Rightarrow a=-2$ eta $b=2$ diranean funtzioa deribagarria izango x = -1 puntuan.

BESTE PUNTUETAN HAU DA $x\neq -1$ DANEAN

f funtzioa jarraia da a eta b edozein izanda ere funtzioa jarraiez osotuta dagoelako (polinomikoak), deribagarria ereizango da funtzioa deribagarriz osotuta dagoelako eta deribada honako hau izango da

$$f'(x)=\begin{cases} -2 & x<-1 \\ 2x & x\geq -1 \end{cases}$$